Механізація, електрифікація

УДК 631.356.02

© 2022

ТЕОРІЯ ЗМУШЕНИХ ПОПЕРЕЧНИХ КОЛИВАНЬ КОРЕНЕПЛОДУ У ҐРУНТІ ЯК У ПРУЖНОДЕМПФУЮЧОМУ СЕРЕДОВИЩІ ПРИ ВІБРАЦІЙНОМУ ВИКОПУВАННІ

В.М. Булгаков[1], І.В. Головач[2], З.В. Ружило[3], О.М. Трохоняк[4], Д.С. Момотюк[5]

[1]доктор технічних наук, професор, академік НААН,
[2]доктор технічних наук, професор, член-кореспондент НААН,
[3,4]кандидати технічних наук,
[1–5]Національний університет біоресурсів і природокористування України
вул. Героїв Оборони, 15, м. Київ, 03041, Україна
e-mail: [1]vbulgakov@meta.ua, [2]holovach.iv@gmail.com, [3]ruzhylo@nubip.edu.ua, [4]klendii_o@ukr.net, [5]dmomotyuk@ukr.net
ORCID: [1]0000-0003-3445-3721, [2]0000-0003-1387-4789, [3]0000-0003-3582-8687, [4]0000-0002-4671-5824

Надійшла 31.01.2022

Мета. *Теоретичне обґрунтування параметрів поперечних коливань коренеплоду як пружного тіла, що знаходиться в ґрунті як у пружнодемпфуючому середовищі для випадку, коли збурювальні сили збігаються з напрямком поступального переміщення викопувального робочого органу, щоб запобігти зламуванню коренеплодів при їх вібраційному викопуванні з грунту.* **Методи.** *Теоретичні дослідження проведено з використанням методів теоретичної механіки та вищої математики, зокрема теорії коливань і варіаційного числення. Числові розрахунки та побудову графічних залежностей виконано на ПК із використанням розроблених програм.* **Результати.** *Розроблено теорію змушених поперечних коливань коренеплоду як пружного тіла, що знаходиться в ґрунті як у пружнодемпфуючому середовищі, при його вібраційному викопуванні для випадку, коли збурювальні сили спрямовані перпендикулярно до осі коренеплоду і збігаються з напрямком поступального переміщення викопувального робочого органу. На основі застосування варіаційного принципу Остроградського – Гамільтона з використанням розробленої еквівалентної схеми отримано аналітичні вирази для визначення амплітуди змушених поперечних коливань тіла коренеплоду залежно від величини амплітуди збурювальної сили, а також коефіцієнтів пружної деформації та демпфування ґрунту для будь-якого його поперечного перерізу. За розробленою програмою проведено числові розрахунки на ПК, які дали*

змогу побудувати графіки зміни амплітуди змушених поперечних коливань коренеплоду як пружного тіла, що знаходиться в грунті як у пружнодемпфуючому середовищі, від величини амплітуди збурювальної сили, коефіцієнтів пружної деформації c та демпфування ґрунту b.* Висновки. *За результатами розрахунків отримано діапазони значень коефіцієнта пружної деформації ґрунту ($c = 1,0 \cdot 10^5 \ldots 1,3 \cdot 10^5$ Н·м$^{-3}$), за яких відбувається резонансний режим, тобто значення амплітуди поперечних змушених коливань пружного тіла коренеплоду перевищує допустимі межі, за частоти збурювальної сили, що дорівнює $v = 10$ Гц. Водночас амплітуда зазначених коливань може досягати значення 0,47 м, особливо в точках захоплення коренеплоду та кінцевій точці його тіла. Це може призвести до його обламування, тому таких діапазонів пружності ґрунту слід уникати. Під час зміни коефіцієнта демпфування ґрунту b у досить широкому діапазоні 0 – 10 (Н·с^2)·м$^{-3}$ резонансного режиму немає, амплітуди поперечних коливань перебувають у допустимих межах. Тому демпфуючі властивості ґрунту прийнятні у всьому досліджуваному діапазоні. Під час розроблення викопувальних робочих органів із розглянутим напрямком коливань необхідно враховувати пружні властивості ґрунту, де такі робочі органи можуть ефективно працювати. Результати проведених аналітичних досліджень використано для розробки нової конструкції вібраційного викопувальнного робочого органу.

Ключові слова*: коренеплід, викопування, ґрунт, поперечні коливання, варіаційні принципи, амплітуда, частота.*

DOI: https://doi.org/10.31073/agrovisnyk202203-09

Сучасні коренезбиральні машини більшості країн світу оснащуються, переважно, вібраційними викопувальними робочими органами, оскільки за їх використання можна вилучати коренеплоди з ґрунту без втрат і ушкоджень. При вібраційному викопуванні досягається максимальне очищення бічних поверхонь коренеплодів буряків від налиплого ґрунту, а також забезпечуються мінімальні втрати врожаю. Водночас витрати енергії за вібраційного викопування через істотне зменшення питомого опору переміщенню робочого органу в ґрунті значно нижчі, ніж за використання інших видів робочих органів.

Однак слід відмітити, що якість виконання зазначеного технологічного процесу істотно залежить від напрямку дії збурювальних сил. На початковому етапі створення вібраційних викопувальних робочих органів бурякозбиральних машин зусилля надавалися коренеплоду, що перебуває в ґрунті, у поперечно-горизонтальній площині перпендикулярно до напрямку поступального руху копача. Однак, через низку істотних недоліків такі робочі органи поширення не набули.

У разі збігу напрямків збурювальних зусиль із напрямком поступального руху вібраційного викопувального робочого органу спостерігається істотна зміна процесу вібраційного викопування коренеплодів. При зазначеному напрямку збурювальних зусиль ефективніше руйнуватимуться зв'язки коренеплодів із ґрунтом і відбуватиметься значно менше накопичення коренеплодів та ґрунту в робочому руслі вібраційного викопувального робочого органу, а його конструкція, що працюватиме за вказаним принципом, буде менш енергоємною і металомісткою. Тому процес вібраційного викопування коренеплодів буряків за дії збурювальних сил у напрямку поступального руху копача потребує більш глибоких теоретичних та експериментальних досліджень для створення нових, досконаліших викопувальних робочих органів.

Перші ґрунтовні аналітичні дослідження коливань тіла коренеплоду за вібраційного викопування були здійснені та опубліковані

у роботі [1]. Тут коренеплід буряків цукрових моделюється як тіло конусоподібної форми, з однією умовно закріпленою нижньою точкою, що має пружні властивості. У цій роботі розглядаються поперечні коливання тіла коренеплоду, що описуються за допомогою диференціального рівняння у частинних похідних четвертого порядку. Рішення отриманого рівняння дало можливість визначити власні частоти вільних поперечних коливань тіла коренеплоду, що знаходиться у ґрунті. Однак у цій роботі процес безпосереднього вилучення коренеплодів буряків цукрових із ґрунту аналітично не досліджується; лише за додатково складеними рівняннями кінетостатики отримано умови їх викопування.

У роботі [2] прийнято основні положення та припущення, які наведено у попередній роботі [1]. Також у роботі [2] не наведено математичної моделі вібраційного викопування коренеплоду буряків цукрових із ґрунту.

Подальший розвиток теорія вібраційного викопування коренеплодів за надання їм збурювальних зусиль у поздовжньо-вертикальній площині знайшла своє відображення в роботах [3–5]. Деякі результати теоретичних досліджень нового вібраційного викопувального робочого органу відображено в роботах [10, 11].

Проте, випадок поперечних змушених коливань тіла коренеплоду при збігу напрямків збурювальних зусиль із напрямком поступального руху вібраційного викопувального робочого органу ще не досліджено. У роботі [6] наведено розроблені основні положення теорії вільних поперечних коливань тіла коренеплоду, коли напрямок збурювальних сил перпендикулярний до осі коренеплоду, і збігається з напрямком поступального руху вібраційного викопувального робочого органу. Тому потрібно дослідити саме змушені коливання коренеплоду, зокрема визначити величину їх амплітуди, щоб запобігти зламуванню коренеплодів при вібраційному викопуванні, а отже і втрат врожаю.

Мета досліджень. Теоретичне обґрунтування параметрів поперечних змушених коливань коренеплоду як пружного тіла, що знаходиться в ґрунті як в пружнодемпфуючому середовищі для випадку, коли збурювальні сили збігаються з напрямом поступального переміщення викопувального робочого органу, щоб запобігти зламуванню коренеплодів при їх вібраційному викопуванні з ґрунту.

Матеріали та методи досліджень. Теоретичні дослідження проведено з використанням методів теоретичної механіки та вищої математики, зокрема теорії коливань і варіаційного числення. Числові розрахунки та побудову графічних залежностей виконано на ПК із використанням розроблених програм.

Результати досліджень. Для дослідження змушених поперечних коливань коренеплоду при його вібраційному викопуванні необхідно скласти еквівалентну схему знаходження коренеплоду як пружного тіла конусоподібної форми у ґрунті, який є пружнодемпфуючим середовищем, а також прикладених до нього зовнішніх сил. Таку схему наведено на рис. 1.

Коренеплід як тіло має конусоподібну форму (кут при вершині якого дорівнює 2γ, а верхня частина знаходиться вище рівня поверхні ґрунту), моделюється як стрижень змінного поперечного перерізу із закріпленим нижнім кінцем (точка О). У центрі мас, який позначено точкою С, прикладено вагу коренеплоду $\overline{G}$. Загальна довжина коренеплоду — h.

У ґрунті на заданій глибині рухається (у напрямку поступального руху копача) вібраційний викопувальний робочий орган, який умовно представлено двома розташованими під кутом площинами, що охоплюють коренеплід із двох сторін і контактують із ним у точках K_1 і K_2. Відповідно у зазначених точках коренеплоду передаються від вібраційного викопувального робочого органу збурювальні зусилля $\overline{Q}_{df1}$ і $\overline{Q}_{df2}$, вектори яких спрямовуються вперед і паралельно один до одного, і саме вони викликають поперечні коливання коренеплоду. Ці сили прикладено на відстані z_1 від горизонтальної лінії, що проходить через точку О.

Ґрунт, який оточує конусоподібне тіло коренеплоду з усіх сторін, представлено у вигляді двох пружнодемпфуючих моделей, що мають однакові коефіцієнти пружності *c* і коефіцієнти демпфування b.

Покажемо на еквівалентній схемі систему декартових координат xOz, у якої початок знаходиться у точці O, а вертикальна вісь Oz збігається з віссю симетрії конусоподібного тіла коренеплоду. Напрямок коливань обох площин вібраційного викопувального робочого органу показано на схемі стрілками.

Розглянемо аналітично коливальний процес, тобто процес поперечних коливань тіла коренеплоду, що знаходиться у ґрунті, які виникають при його взаємодії з вібраційним робочим органом. Для цього застосуємо варіаційний принцип Остроградського – Гамільтона для дослідження змушених поперечних коливань коренеплоду, що відбуваються під дією горизонтальної збурювальної сили, яка змінюється за гармонічним законом такого вигляду:

$$Q_{df.} = H \cdot \sin(\omega t), \qquad (1)$$

де H — амплітуда збурювальної сили, Н; ω — частота збурювальної сили, $с^{-1}$, t — поточний час, с.

Однак, як видно з еквівалентної схеми (рис. 1), зазначена вище збурювальна сила $\overline{Q}_{df}$ прикладається до коренеплоду одразу з двох його боків від двох викопувальних лемешів, а тому на схемі вона представлена двома складовими $\overline{Q}_{df1}$ і $\overline{Q}_{df2}$ і саме вони викликають поперечні коливання коренеплоду, які руйнують його зв'язки з ґрунтом та сприяють сепарації.

Виходячи з умов, представлених на еквівалентній схемі, складемо функціонал Остроградського – Гамільтона, який дасть змогу аналітично описати цей вид коливань коренеплоду. За наведеними вище припущеннями відхилення точок осі коренеплоду при його поперечних коливаннях однозначно визначаються функцією двох змінних:

$$y = y(z,t), \qquad (2)$$

де z — відстань точки на осі Oz, через яку проходить поперечний переріз коренеплоду, від умовної точки O закріплення коренеплоду у ґрунті, м; t — поточний час, с.

Далі введемо необхідні позначення. Так, μ(z) погонна маса (маса одиниці довжини) коренеплоду, кг·$м^{-1}$; E — модуль Юнга матеріалу коренеплоду, Н·$м^{-2}$; J(z) — момент інерції поперечного перерізу коренеплоду відносно нейтральної осі перерізу, $м^4$; Q(z,t) — інтенсивність поперечного зовнішнього навантаження, спрямованого перпендикулярно до осі коренеплоду (осі Oz) вздовж осі Ox, Н·$м^{-1}$.

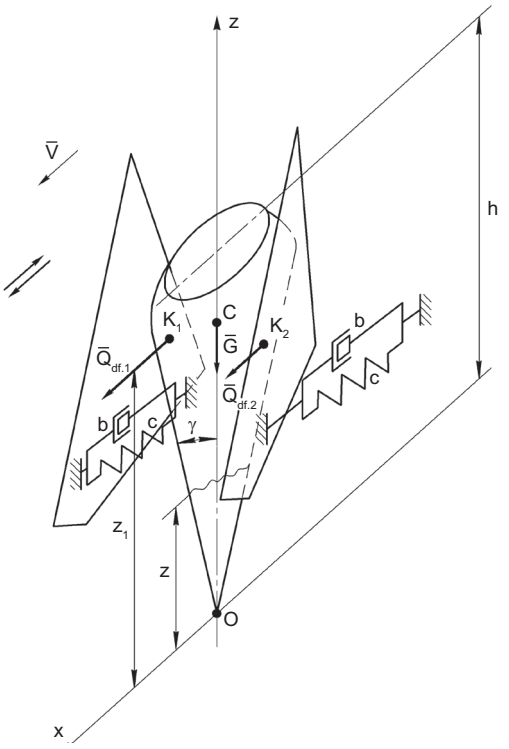


Рис. 1. Еквівалентна схема поперечних коливань коренеплоду, що знаходиться у ґрунті, при вібраційному викопуванні

Відповідно до [7] функціонал Остроградського – Гамільтона для стрижня змінного поперечного перерізу, який здійснює поперечні коливання під дією зовнішнього поперечного навантаження, має такий вигляд:

$$S = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\int_{0}^{h}\left[\mu(z)\cdot\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 - E\cdot J(z)\cdot\left(\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}\right)^2 + Q(z,t)\cdot y\right]dz\,dt. \qquad (3)$$

Враховуючи, що коренеплід моделюється тілом конусоподібної форми, виразимо величини, які входять до функціоналу (3), через основні параметри його конічної поверхні.

Очевидно, що погонну масу коренеплоду можна визначити за допомогою такого виразу:

$$\mu(z)=\rho\cdot\pi\cdot z^2\cdot\tan^2\gamma, \quad (4)$$

де ρ — щільність матеріалу коренеплоду, кг·м$^{-3}$; 2γ — кут конуса, яким моделюється тіло коренеплоду, град.

Момент інерції J(z) коренеплоду визначається так:

$$J(z)=\frac{\pi\cdot z^4\cdot\tan^4\gamma}{4}. \quad (5)$$

Оскільки величина Q(z,t), яка входить у функціонал (3), є інтенсивністю розподіленого навантаження, що вимірюється в Н·м$^{-1}$, то збурювальна сила $\overline{Q}_{df}$, яка є зосередженим навантаженням і вимірюється в ньютонах, теж повинна мати розмірність Н·м$^{-1}$. Для цього вводиться імпульсна функція першого порядку $\sigma(z)$ [7].

Отже, якщо $Q_{df}(t)$ — зосереджена збурювальна сила, прикладена в точці та вимірюється в ньютонах, то функція:

$$Q_{df.}(z,t)=Q_{df.}(t)\cdot\sigma_1(z-z_1), \quad (6)$$

має розмірність Н·м$^{-1}$ і виражає інтенсивність зосередженого навантаження у точці z_1. Функція $\sigma_1(z-z_1)$ дорівнює нулю для всіх z, окрім $z=z_1$, де вона перетворюється на нескінченність.

Тоді, з огляду на вираз (1), можна записати вираз для зосередженої збурювальної сили:

$$Q_{df.}(z,t)=H\cdot\sin(\omega t)\cdot\sigma_1(z-z_1). \quad (7)$$

Оскільки коренеплід на початку коливального процесу міцно зв'язаний із ґрунтом, який є пружнодемпфуючим середовищем, то за впливу на коренеплід збурювальної сили $Q_{df}(t)$, що має значення (1), виникає сила опору ґрунту поперечним коливанням коренеплоду. Очевидно, що сила опору ґрунту (для всього тіла коренеплоду) є навантаженням, розподіленим по площі контакту з ґрунтом, причому вона є зовнішньою силою щодо тіла коренеплоду і виступає в ролі збурювальної сили з боку ґрунту, що діє на коренеплід.

Далі, нехай c — коефіцієнт пружної деформації ґрунту, віднесений до площі контакту з ґрунтом, що вимірюється в Н·м$^{-3}$. Вважатимемо, що під час поперечних коливань коренеплід спирається на ґрунт половиною своєї бічної поверхні по всій глибині знаходження коренеплоду в нерозпушеному ґрунті. З боку ґрунту, що контактує з цією частиною бічної поверхні, виникає розподілене навантаження, спрямоване протилежно дії збурювальної сили. Отже, за поперечних коливань коренеплоду та безпосередньо самого робочого органу, то з одного боку коренеплоду, то з іншого, виникає розподілене навантаження, що діє на нього з боку навколишнього ґрунту та спрямоване протилежно до дії збурювальної сили.

Отже, враховуючи зазначене вище, і за умови, що коренеплід має конічну форму, у деякому наближенні можна стверджувати, що інтенсивність розподіленого навантаження пружного опору ґрунту P(z,t) дорівнюватиме:

$$P(z,t)=\pi\cdot c\cdot z\cdot\tan\gamma\cdot y(z,t),\ \text{Н·м}^{-1}. \quad (8)$$

Оскільки збурювальні сили від вібраційного робочого органу та опору ґрунту мають протилежний напрямок, то результуюча інтенсивність зовнішнього поперечного навантаження, що діє на коренеплід, матиме таке значення:

$$Q(z,t)=Q_{df.}(z,t)-P(z,t),\ \text{Н·м}^{-1}. \quad (9)$$

або, з урахуванням виразів (7) і (8), отримаємо наступний вираз для зовнішнього поперечного навантаження:

$$Q(z,t)=H\cdot\sin(\omega t)\cdot\sigma_1(z-z_1)-\\-\pi\cdot c\cdot z\cdot\tan\gamma\cdot y(z,t),\ \text{Н·м}^{-1}. \quad (10)$$

Врахуємо також демпфуючі властивості ґрунту. Оскільки швидкість деформації тіла коренеплоду є досить великою, отже і швидкість деформації ґрунту навколо коренеплоду — велика. Вважатимемо, що сила демпфування ґрунту матиме квадратичну залежність від швидкості деформації самого тіла коренеплоду [9]. Тому, враховуючи конічну форму коренеплоду, сила демпфування ґрунту визначатиметься за допомогою такого виразу:

$$R(z,t)=\pi\cdot b\cdot z\cdot\tan\gamma\cdot\left[\frac{\partial y(z,t)}{\partial t}\right]^2,\ \text{Н}, \quad (11)$$

де b — коефіцієнт демпфування ґрунту, що вимірюється в (Н·с^2)·м$^{-3}$.

Отже, враховуючи вирази (4), (5), (10) і (11), функціонал (3) набуде такого вигляду:

$$S=\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\int_{0}^{h}\left[\rho\cdot\pi\cdot z^2\cdot\tan^2\gamma\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2-\right.$$

$$-E\cdot\frac{\pi\cdot z^4\cdot\tan^4\gamma}{4}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}\right)^2+H\cdot\sin(\omega t)\times$$

$$\times\sigma_1(z-z_1)\cdot y(z,t)-\pi\cdot c\cdot z\cdot\tan\gamma\cdot y^2(z,t)-$$

$$\left.-\pi\cdot b\cdot z\cdot\tan\gamma\cdot\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2\right]dz\,dt. \qquad (12)$$

Для дослідження змушених поперечних коливань тіла коренеплоду, закріпленого в грунті, можна застосувати метод Рітца.

Оскільки збурювальна сила діє на коренеплід з частотою ω, його змушені коливання відбуватимуться згідно [7] за таким законом:

$$y(z,t)=\varphi(z)\sin(\omega t), \qquad (13)$$

де $\varphi(z)$ — форма змушених коливань.

Обчислимо необхідні частинні похідні від виразу (13). Матимемо:

$$\frac{\partial y}{\partial t}=\omega\cdot\varphi(z)\cdot\cos(\omega t),$$
$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}=\varphi''(z)\cdot\sin(\omega t). \qquad (14)$$

Підставляючи вирази (13) і (14) у функціонал (12), отримаємо таке значення:

$$S=\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\int_{o}^{h}\left\{\rho\cdot\pi\cdot z^2\cdot\tan^2\gamma\cdot\omega^2\cdot\varphi^2(z)\cdot\cos^2(\omega t)-\right.$$

$$-\frac{E\cdot\pi\cdot z^4\cdot\tan^4\gamma}{4}\left[\varphi''(z)\right]^2\cdot\sin^2(\omega t)+$$

$$+H\cdot\sigma_1(z-z_1)\cdot\varphi(z)\cdot\sin^2(\omega t)-$$

$$-\pi\cdot c\cdot z\cdot\tan\gamma\cdot\varphi^2(z)\cdot\sin^2(\omega t)-$$

$$\left.-\pi\cdot b\cdot z\cdot\tan\gamma\cdot\omega^2\cdot\varphi^2(z)\cdot\cos^2(\omega t)\right\}dz\,dt. \qquad (15)$$

Проінтегруємо вираз (15) по z у межах одного періоду $T=\frac{2\pi}{\omega}$, отримаємо:

$$S=\frac{\pi}{2\omega}\int_{o}^{h}\left\{\rho\cdot\pi\cdot z^2\cdot\tan^2\gamma\cdot\varphi^2(z)\cdot\omega^2-\right.$$

$$-\frac{E\cdot\pi\cdot z^4\cdot\tan^4\gamma}{4}\cdot\left[\varphi''(z)\right]^2+H\cdot\sigma_1(z-z_1)\cdot\varphi(z)-$$

$$+H\cdot\sigma_1(z-z_1)\cdot\varphi(z)-\pi\cdot c\cdot z\cdot\tan\gamma\cdot\varphi^2(z)-$$

$$\left.-\pi\cdot b\cdot z\cdot\tan\gamma\cdot\omega^2\cdot\varphi^2(z)\right\}dz. \qquad (16)$$

Відповідно до методу Рітца розглянемо значення функціоналу (16) на сукупності лінійних комбінацій наступного вигляду:

$$\varphi(z)=\alpha\cdot\psi(z), \qquad (17)$$

де α — параметр, варіюванням якого можна отримати клас допустимих функцій; $\psi(z)$ — базова функція.

Підставивши вираз (17) у функціонал (16), отримаємо:

$$S=\frac{\pi}{2\omega}\int_{o}^{h}\left\{\rho\cdot\pi\cdot z^2\cdot\tan^2\gamma\cdot\alpha^2\cdot\psi^2(z)\cdot\omega^2-\right.$$

$$-\frac{E\cdot\pi\cdot z^4\cdot\tan^4\gamma}{4}\alpha^2\left[\psi''(z)\right]^2+$$

$$+H\cdot\sigma_1(z-z_1)\cdot\alpha\cdot\psi(z)-\pi\cdot c\cdot z\cdot\tan\gamma\cdot\alpha^2\cdot\psi^2(z)-$$

$$\left.-\pi\cdot b\cdot z\cdot\tan\gamma\cdot\alpha^2\cdot\psi^2(z)\cdot\omega^2\right\}dz. \qquad (18)$$

Введемо такі позначення:

$$\int_{o}^{h}\rho\cdot\pi\cdot z^2\cdot\tan^2\gamma\cdot\psi^2(z)\,dz=M, \qquad (19)$$

$$\int_{0}^{h}\frac{E\cdot\pi\cdot z^4\cdot\tan^4\gamma}{4}\left[\psi''(z)\right]^2dz=N, \qquad (20)$$

$$\int_{o}^{h}\pi\cdot c\cdot z\cdot\tan\gamma\cdot\psi^2(z)\,dz=R, \qquad (21)$$

$$\int_{o}^{h}\pi\cdot b\cdot z\cdot\tan\gamma\cdot\psi^2(z)\,dz=F, \qquad (22)$$

$$\int_{o}^{h}H\cdot\sigma_1(z-z_1)\cdot\psi(z)\,dz=L. \qquad (23)$$

Підставивши вирази (19)–(23) у вираз (18), матимемо:

$$S=\frac{\pi}{2\omega}\left[\omega^2\cdot(M-F)\cdot\alpha^2-(N+R)\cdot\alpha^2+L\cdot\alpha\right]. \qquad (24)$$

Отже, на сукупності функцій (17) функціонал (18) перетворюється на функцію від незалежної змінної α. Необхідною умовою екстремуму функції (24) є рівність нулю її першої

похідної. Отже, продиференціювавши вираз (24) по параметру α і прирівнявши отриману похідну до нуля, отримаємо таке рівняння:

$$2\omega^2\cdot(M-F)\cdot\alpha-2(N+R)\cdot\alpha+L=0, \quad (25)$$

звідки визначаємо параметр α, який буде дорівнювати:

$$\alpha=\frac{L}{2\left[N+R-\omega^2\cdot(M-F)\right]}. \quad (26)$$

Приймемо за базову функцію $\psi(z)$ форму змушених поперечних коливань однорідного стрижня постійної жорсткості EJ з одним жорстко закріпленим кінцем, що виникають під дією поперечної одиничної гармонічної сили, яка має частоту ω, прикладену в точці $z=z_1$. Відповідно до [7] така форма має вигляд:

$$\psi(z)=C\cdot U(kz)+D\cdot V(kz),\ 0\le z<z_1 \quad (27)$$

$$\psi(z)=C\cdot U(kz)+D\cdot V(kz)+\frac{1}{k^3\cdot EJ}\cdot V\left[k(z-z_1)\right],$$

$$z_1\le z\le h. \quad (28)$$

де U(kz), V(kz) — функції Крилова [7], $k=\sqrt[4]{\frac{\mu\cdot\omega^2}{EJ}}$ — коефіцієнт, що враховує властивості маси, кінематики та міцності матеріалу стрижня, μ — погонна маса стрижня; C, D — довільні постійні. Водночас граничні умови для коливань згаданого стрижня мають такий вигляд:

$$\begin{aligned} y(0)&=y'(0)=0,\\ y''(h)&=y'''(h)=0. \end{aligned} \quad (29)$$

Враховуючи граничні умови (29) на вільному кінці стрижня ($z=h$), отримаємо наступну систему рівнянь щодо невідомих $\psi(z)$, C, D:

$$\left.\begin{aligned} &-\psi(z)+C\cdot U(kz)+D\cdot V(kz)=\\ &=\begin{cases}0, & 0\le z<z_1,\\ -\frac{1}{k^3\cdot EJ}\cdot V\left[k(z-z_1)\right], & z_1\le z\le h,\end{cases}\\ &C\cdot S(kh)+D\cdot T(kh)=-\frac{1}{k^3\cdot EJ}T\left[k(h-z_1)\right],\\ &C\cdot V(kh)+D\cdot S(kh)=-\frac{1}{k^3\cdot EJ}S\left[k(h-z_1)\right]. \end{aligned}\right\} \quad (30)$$

У цьому випадку необхідно визначити лише базову функцію $\psi(z)$, яка відповідає згаданим граничним умовам. Із системи рівнянь (30) методом Крамера знаходимо значення $\psi(z)$ що дорівнюватиме:

$$\psi(z)=\frac{U(kz)}{\Delta\cdot k^3\cdot EJ}\left\{T\left[k(h-z_1)\right]S(kh)-\right.$$

$$\left.-T(kh)S\left[k(h-z_1)\right]\right\}-\frac{V(kz)}{\Delta\cdot k^3\cdot EJ}\left\{T\left[k(h-z_1)\right]\times\right.$$

$$\left.\times V(kh)-S\left[k(h-z_1)\right]S(kh)\right\},\quad 0\le z<z_1, \quad (31)$$

або

$$\psi(z)=-\frac{V\left[k(z-z_1)\right]}{\Delta\cdot k^3\cdot EJ}\left\{S^2(kh)-T(kh)\cdot V\cdot(kh)\right\}+$$

$$+\frac{U(kz)}{\Delta\cdot k^3\cdot EJ}\left\{T\left[k(h-z_1)\right]\cdot S(kh)-T(kh)\times\right.$$

$$\left.\times S\left[k(h-z_1)\right]\right\}-\frac{V(kz)}{\Delta\cdot k^3\cdot EJ}\left\{T\left[k(h-z_1)\right]\times\right.$$

$$\left.\times V(kh)-S\left[k(h-z_1)\right]\cdot S(kh)\right\},\quad z_1\le z\le h, \quad (32)$$

де Δ — головний визначник системи рівнянь (30), який дорівнює:

$$\Delta=T(kz)\cdot V(kz)-S^2(kz). \quad (33)$$

Введемо такі позначення:

$$\frac{T\left[k(h-z_1)\right]\cdot S(kh)-T(kh)\cdot S\left[k(h-z_1)\right]}{\Delta\cdot k^3\cdot EJ}=B, \quad (34)$$

$$\frac{T\left[k(h-z_1)\right]\cdot V(kh)-S\left[k(h-z_1)\right]\cdot S(kh)}{\Delta\cdot k^3\cdot EJ}=G, \quad (35)$$

$$\frac{S^2(kh)-T(kh)\cdot V(kh)}{\Delta\cdot k^3\cdot EJ}=K. \quad (36)$$

Підставимо вирази (34), (35), (36) до виразів (31), (32); отримаємо:

$$\psi(z)=B\cdot U(kz)-G\cdot V(kz),\ 0\le z<z_1 \quad (37)$$

$$\psi(z)=-K\cdot V[k(z-z_1)]+B\cdot U(kz)-$$
$$-G\cdot V(kz),\ z_1\le z\le h. \quad (38)$$

Визначимо коефіцієнти M, N, R, F, L, що входять до виразу (26).

Підставимо вирази (37), (38) до виразу (19), щоб знайти значення коефіцієнта M. Він дорівнюватиме:

$$M=\rho\cdot\pi\cdot\tan^2\gamma\cdot\int_0^{z_1}z^2\cdot\left[B\cdot U(kz)-G\cdot V(kz)\right]^2dz+$$
$$+\rho\cdot\pi\cdot\tan^2\gamma\cdot\int_{z_1}^{h}z^2\cdot\left\{-K\cdot V\left[k(z-z_1)\right]+\right.$$
$$\left.+B\cdot U(kz)-G\cdot V(kz)\right\}^2dz. \quad (39)$$

Для визначення коефіцієнта N знаходимо другі похідні від виразів (37), (38). Отримаємо:

$$\psi''(z)=B\cdot k^2\cdot S(kz)-G\cdot k^2\cdot T(kz),\ 0\le z<z_1, \quad (40)$$

$$\psi''(z)=-K\cdot k^2\cdot T[k(z-z_1)]+$$
$$+B\cdot k^2\cdot S(kz)-G\cdot k^2\cdot T(kz),\ z_1\le z\le h. \quad (41)$$

Підставляючи вирази (40), (41) до виразу (20), знаходимо значення коефіцієнта N:

$$N=\frac{E\cdot\pi\cdot\tan^4\gamma}{4}\cdot\int_0^{z_1}k^4\cdot z^4\cdot\left[B\cdot S(kz)-\right.$$
$$\left.-G\cdot T(kz)\right]^2dz+\frac{E\cdot\pi\cdot\tan^4\gamma}{4}\cdot\int_{z_1}^{h}k^4\cdot z^4\times$$
$$\times\left\{-K\cdot T\left[k(z-z_1)\right]+B\cdot S(kz)-G\cdot T(kz)\right\}^2dz. \quad (42)$$

Підставляючи вирази (37), (38) у вираз (21), знаходимо значення коефіцієнта R:

$$R=c\cdot\pi\cdot\tan\gamma\cdot\int_0^{z_1}z\cdot\left[B\cdot U(kz)-G\cdot V(kz)\right]^2dz+$$
$$+c\cdot\pi\cdot\tan\gamma\cdot\int_{z_1}^{h}z\cdot\left\{-K\cdot V\left[k(z-z_1)\right]+B\cdot U(kz)-\right.$$
$$\left.-G\cdot V(kz)\right\}^2dz. \quad (43)$$

Підставляючи такі самі вирази у вираз (22), знаходимо значення коефіцієнта F:

$$F=b\cdot\pi\cdot\tan\gamma\cdot\int_0^{z_1}z\cdot\left[B\cdot U(kz)-G\cdot V(kz)\right]^2dz+$$
$$+b\cdot\pi\cdot\tan\gamma\cdot\int_{z_1}^{h}z\cdot\left\{-K\cdot V\left[k(z-z_1)\right]+B\cdot U(kz)-\right.$$
$$\left.-G\cdot V(kz)\right\}^2dz. \quad (44)$$

Коефіцієнт L знаходимо підстановкою виразів (37), (38) у вираз (23). Його значення дорівнюватиме:

$$L=\int_0^{z_1}H\cdot\sigma_1(z-z_1)\cdot\left[B\cdot U(kz)-G\cdot V(kz)\right]dz+$$
$$+\int_{z_1}^{h}H\cdot\sigma_1(z-z_1)\cdot\left\{-K\cdot V\left[k(z-z_1)\right]+B\cdot U(kz)-\right.$$
$$\left.-G\cdot V(kz)\right\}dz. \quad (45)$$

Обчислення значень коефіцієнтів M, N, R і F можна здійснити за допомогою ПК, або безпосередньо інтегруючи функції Крилова, або після переходу до елементарних функцій згідно з [7].

Оскільки у вираз (45) для знаходження коефіцієнта L входить імпульсна функція $\sigma(z-z_1)$, яка не відноситься до класичних функцій, обчислення інтегралів, що входять до зазначеного виразу, необхідно здійснити аналітичним способом, використовуючи методи інтегрування узагальнених функцій.

У результаті інтегрування виразу (45), отримаємо:

$$L=H\left[B\cdot U(kz_1)-G\cdot V(kz_1)\right]. \quad (46)$$

Підставляючи далі вирази (39), (42), (43), (44) і (46) у вираз (26), отримаємо необхідне значення параметра, за якого функціонал (16) матиме стаціонарне значення. Відповідно, враховуючи вирази (17), (37) і (38), отримаємо вирази для форми змушених поперечних коливань тіла коренеплоду, закріпленого у ґрунті.

Ці вирази мають такий вигляд:

$$\varphi(z)=\alpha\cdot\left[B\cdot U(kz)-G\cdot V(kz)\right],\quad 0\le z\le z_1, \quad (47)$$

$$\varphi(z)=\alpha\cdot\left\{-K\cdot V\left[k(z-z_1)\right]+\right.$$
$$\left.+B\cdot U(kz)-G\cdot V(kz)\right\},\ z_1\le z\le h, \quad (48)$$

де α визначається згідно з виразом (26).

Підставивши вирази (47) і (48) у вираз (13), остаточно отримаємо закон змушених поперечних коливань тіла коренеплоду, закріпленого у ґрунті:

$$y(z,t)=\alpha\cdot\left[B\cdot U(kz)-G\cdot V(kz)\right]\cdot\sin(\omega t),\quad 0\le z\le z_1, \tag{49}$$

$$y(z,t)=\alpha\cdot\left\{-K\cdot V\left[k(z-z_1)\right]+B\cdot U(kz)-G\cdot V(kz)\right\}\cdot\sin(\omega t),\quad z_1\le z\le h. \tag{50}$$

За результатами наведених вище теоретичних досліджень змушених поперечних коливань тіла коренеплоду нами було побудовано алгоритм розрахунку зазначених коливань за допомогою ПК.

Для розрахунків було використано такі вихідні дані. Відповідно до [1] було прийнято наступні діапазони коефіцієнтів пружної деформації та демпфування ґрунту:

$c=0...20\cdot10^5$ Н·м$^{-3}$;

$b=0...10$ (Н·с$^{-2}$)·м$^{-3}$.

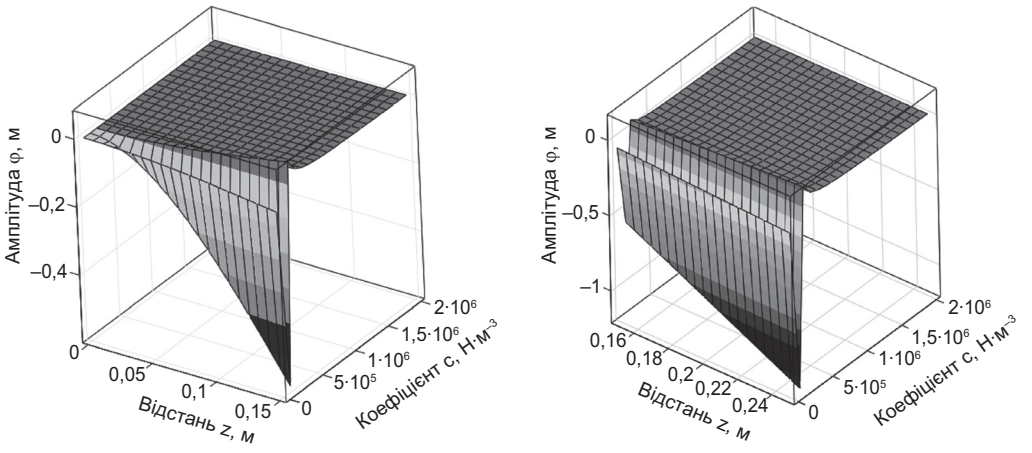
Відповідно до [2] прийнято усереднені статистичні значення фізико-механічних характеристик коренеплоду:

$h=0{,}25$ м; $\gamma=14°$; $E=18{,}4\cdot10^6$ Н·м$^{-2}$; $\rho=750$ кг·м$^{-3}$.

За результатами розрахунків на ПК за складеною програмою побудовано графіки, які показують залежності амплітуди змушених поперечних коливань коренеплоду як пружного тіла, що знаходиться (фактично перебуває закріпленим) у ґрунті як у пружно демпфуючому середовищі, від величини амплітуди збурювальної сили, а також механічних властивостей оточуючого коренеплід ґрунту. Графіки наведено на рис. 2 і рис. 3.

На рис. 2 зображено графіки залежності амплітуди змушених поперечних коливань тіла коренеплоду від коефіцієнта с пружної деформації ґрунту та відстані z поперечного перерізу коренеплоду до умовної точки О його закріплення у ґрунті за амплітуди збурювальної сили Н=500 Н, її частоти $\nu=10$ Гц і коефіцієнта демпфування $b=6{,}5$ (Н·с$^{-2}$)·м$^{-3}$.

Як видно з наведених графіків, амплітуда змушених поперечних коливань різко зростає при $c=1{,}0\cdot10^5\ldots1{,}3\cdot10^5$ Н·м$^{-3}$ і $z=0{,}15$ м, $z=0{,}25$ м, тобто у точці захоплення коренеплоду робочим органом та на його кінці. Водночас частота змушених коливань майже збігається із частотою власних



а) *б)*

Рис. 2. Залежність амплітуди змушених поперечних коливань тіла коренеплоду від коефіцієнта пружної деформації ґрунту с та від відстані z поперечного перерізу коренеплоду до умовної точки його закріплення: а) z=0…0,15 м, б) z=0…0,25 м, (амплітуда збурювальної сили Н=500 Н, коефіцієнт демпфування ґрунту b=6,5 (Н·с^2)·м$^{-3}$, частота збурювальної сили $\nu=10$ Гц).

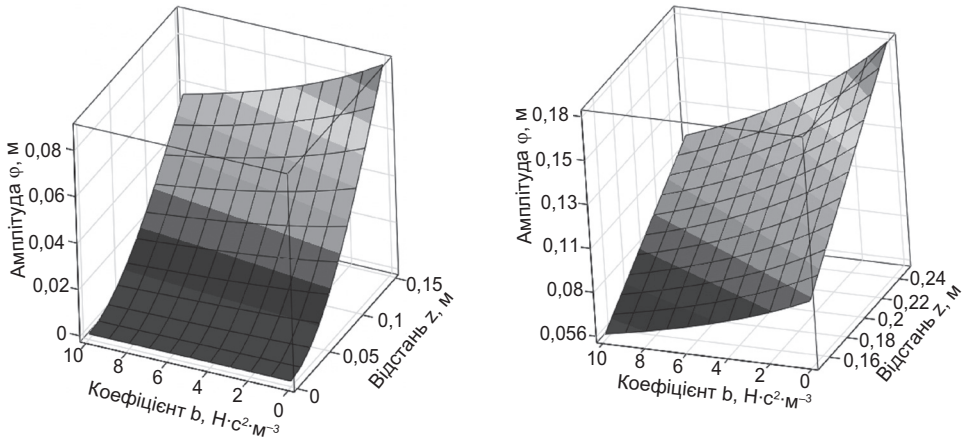


Рис. 3. Залежність амплітуди змушених поперечних коливань тіла коренеплоду від коефіцієнта b демпфування ґрунту та від відстані поперечного перерізу коренеплоду до умовної точки його закріплення: а) z = 0…0,15 м; б) z = 0,15…0,25 м; (амплітуда збурювальної сили H = 500 Н, частота збурювальної сили ν = 10 Гц, коефіцієнт пружної деформації ґрунту c = 2,0·10⁵, Н·м⁻³)

коливань тіла коренеплоду. У цьому діапазоні значень пружної деформації ґрунту амплітуда може досягати значення 0,47 м. Отже, у зазначеному діапазоні резонансного режиму коливань тіла коренеплоду можливе його зламування, особливо в хвостовій частині. За всіх інших значень коефіцієнтів пружної деформації ґрунту амплітуда наближається до нуля і знаходиться в межах кількох міліметрів, що є безпечним щодо зламування хвостової частини.

На рис. 3 наведено графічні залежності амплітуди змушених поперечних коливань тіла коренеплоду від коефіцієнта b демпфування ґрунту за частоти збурювальної сили ν, що дорівнює 10 Гц, амплітуді збурювальної сили H = 500Н і коефіцієнту пружної деформації ґрунту $c = 2{,}0 \cdot 10^5$ Н·м$^{-3}$.

Як показують графіки, наведені на рис. 3, при зміні коефіцієнта демпфування b від 0 до 10 (Н·с^2)·м$^{-3}$ амплітуда поперечних змушених коливань змінюється в точці захоплення кореплоду робочим органом (z = 0,15 м) від 0,056 м до 0,088 м, а на кінці коренеплоду (z = 0,24 м) — від 0,132 м до 0,168 м. Однак, при b = 6,5 (Н·с^2)·м$^{-3}$, як найпоширенішому коефіцієнті демпфування ґрунту, значення цієї амплітуди дорівнює 0,063 м, що знаходиться в межах допустимих поперечних деформацій для тіла коренеплоду.

Як бачимо із зазначених графіків, — максимальні амплітуди змушених поперечних коливань спостерігаються в точці захоплення коренеплоду робочим органом (z = 0,15 м) і на його кінці (z = 0,24 м), проте в цьому випадку резонансні явища не спостерігаються.

Висновки

За результатами розрахунків отримані діапазони значень коефіцієнта пружної деформації ґрунту ($c = 1{,}0 \cdot 10^5 \ldots 1{,}3 \cdot 10^5$ Н·м$^{-3}$), за яких має місце резонансний режим, тобто значення амплітуди поперечних змушених коливань пружного тіла коренеплоду перевищує допустимі межі, при частоті збурювальної сили, що дорівнює ν = 10Гц. При цьому амплітуда зазначених коливань може досягати значення 0,47 м, особливо в точках захоплення коренеплоду і на його кінці. Це може призвести

до його обламування, тому таких діапазонів пружності ґрунту слід уникати.

При зміні коефіцієнта b демпфування ґрунту в досить широкому діапазоні 0…10 (Н·с²)·м⁻³ резонансного режиму немає, амплітуди поперечних коливань перебувають у допустимих межах. Тому демпфуючі властивості ґрунту прийнятні у всьому досліджуваному діапазоні.

При розробленні викопувальних робочих органів з розглянутим напрямом коливань необхідно враховувати пружні властивості ґрунту, де такі робочі органи можуть ефективно працювати.

Результати проведених аналітичних досліджень використані для розробки нової конструкції вібраційного викопувальнного робочого органу.

Bulgakov V.[1], Holovach I.[2], Ruzhylo Z.[3], Trokhoniak O.[4], Momotiuk D.[5]

[1–5]National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine, 15 Heroiv Oborony Str., 03041 Kyiv, Ukraine; e-mail: [1]vbulgakov@meta.ua, [2]holovach.iv@gmail.com, [3]ruzhylo@nubip.edu.ua, [4]klendii_o@ukr.net, [5]dmomotyuk@ukr.net; ORCID: [1]10000-0003-3445-3721, [2]20000-0003-1387-4789, [3]30000-0003-3582-8687, [4]40000-0002-4671-5824

Theory of forced transverse oscillations of root in soil as in elastic damping environment during vibration excavation

Goal. To substantiate theoretically the parameters of transverse oscillations of the root as an elastic body located in the soil as in an elastic damping medium for the case when the perturbing forces coincide with the direction of the progressive movement of the digging working body to prevent breakage of roots during vibration excavation. **Methods.** Theoretical research was conducted using the methods of theoretical mechanics and higher mathematics, including the theory of oscillations and calculus of variations. Numerical calculations and construction of graphical dependences were performed on a PC using compiled programs. **Results.** The theory of forced transverse oscillations of a root crop as an elastic body located in the soil as in an elastic damping medium during vibration excavation is developed for the case when perturbing forces are directed perpendicular to the root crop axis and coincide with the direction of the progressive movement of the excavating working body. Based on the application of the Ostrogradskyi-Hamilton variational principle using the developed equivalent scheme, analytical expressions were obtained to determine the amplitude of forced transverse oscillations of the root body depending on the amplitude of the perturbing force and the coefficients of elastic deformation and damping of the soil for any cross-section. According to the developed program, numerical calculations were performed on PC, which allowed building graphs of changes in the amplitude of forced transverse oscillations of the root as an elastic body in the soil as in an elastic damping medium, from the amplitude of the perturbing force, elastic deformation coefficients c and soil damping b. **Conclusions.** According to the results of calculations, ranges of values are obtained of the coefficient of elastic deformation of the soil ($c = 1.0 \cdot 10^5 \ldots 1.3 \cdot 10^5$ N·m^{-3}), for which the resonant regime is observed, i.e. the value of the amplitude of transverse forced oscillations of the elastic body of the root exceeds the allowable limits at a frequency of perturbing force equal to $\nu = 10$ Hz. At the same time, the amplitude of these oscillations can reach 0.47 m, especially at the points of the capture of the root crop and the endpoint of its body. This can lead to breakage, so such ranges of soil elasticity should be avoided. When changing the soil damping coefficient b in a fairly wide range of 0–10 (N·s²)·m^{-3} there is no resonant mode, and the amplitude of transverse oscillations is within acceptable limits. Therefore, the damping properties of the soil are acceptable throughout the study range. When developing excavation working bodies with the considered direction of oscillations, it is necessary to take into account the elastic properties of the soil, where such working bodies can work effectively. The results of the analytical research were used to develop a new design of the vibrating excavation working body.

Key words: *root crop, excavation, soil, transverse oscillations, variational principles, amplitude, frequency.*

DOI: https://doi.org/10.31073/agrovisnyk202203-09

Бібліографія

1. *Василенко П.М., Погорелый Л.В., Брей В.В.* Вибрационный способ уборки корнеплодов. *Механизация и электрификация социалистического сельского хозяйства*. 1970. №2. С. 9–13.

2. *Погорелый Л.В. , Татьянко Н.В. , Брей В.В.* и др. Свеклоуборочные машины (конструирование и расчёт); под общ. ред. Л.В. Погорелого. Киев: Техника, 1983. 168 с.

3. *Булгаков В.М., Головач І.В.* та ін. Теорія вібраційного викопування коренеплодів. Механізація сільськогосподарського виробництва: збірник наукових праць Національного аграрного університету. Т. XV, Київ: Національний аграрний університет, 2003. С. 45–85.

4. *Булгаков В.М., Головач І.В.* Теорія повздовжніх коливань коренеплоду при вібраційному вилученні з ґрунту. *Вісник Харківського державного технічного університету сільського господарства: Механізація сільськогосподарського виробництва:* Збірник наукових праць. Вип. 20. Харків: ХДТУСГ, 2003. С. 216–240.

5. *Булгаков В.М., Головач І.В.* Використання вібраційних рабочих органів при викопуванні коренеплодів цукрових буряків. *Вісник аграрної науки.* 2004. №2. С. 40–45.

6. *Булгаков В.М., Головач І.В.* Теорія поперечних коливань коренеплоду при вібраційному викопуванні. *Праці Таврійської державної агротехногогічної академії.* Вип. 21. Мелітополь, 2004. С. 33–48.

7. *Бабаков И.М.* Теория колебаний. Москва: Наука, 1968. 560 с.

8. *Булгаков В.М.* Бурякозбиральні машини. Київ: Аграрна наука, 2011. 351 с.

9. *Магнус К.* Колебания: Введение в исследование колебательных систем. Пер. с нем. Москва: Мир, 1982. 304 с.

10. *Bulgakov V., Holovach I., Adamchuk V.* et al. Research into geometric parameters of digging shares used for lifting sugar beet roots from soil with assistance of vibration. *Agronomy Research.* 2021. V. 19. № 2. P. 369–384. doi: 10.15159/AR.21.024

11. *Bulgakov V., Holovach I., Melnik. V.* et al. Theoretical research into force interaction between vibrational lifting tool and root. *AMA, Agricultural Mechanization in Asia, Africa and Latin America, Japan.* V. 52, Is. 02. 2021. P. 3213–3230.