



Агроекологія, радіологія, меліорація

УДК 631.6

© 2024

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЯК ІНСТРУМЕНТ ДОСЛІДЖЕНЬ ТА ПІДТРИМКИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ У МЕЛІОРАЦІЇ

М.І. Ромащенко¹, В.О. Богаєнко²

¹доктор технічних наук, професор, академік НААН
²кандидат технічних наук

¹Київський аграрний університет НААН
вул. Васильківська, 37, м. Київ, 03022, Україна
²Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України
пр. Глушкова, 40, м. Київ, 03187, Україна
e-mail: ¹mi.romashchenko@gmail.com, ²sevab@ukr.net
ORCID: ¹0000-0002-9997-1346, ²0000-0002-3317-9022

Надійшла 24.11.2023

Мета. Обґрунтувати доцільність та напрями застосування математичного моделювання для вирішення завдань з досліджень та підтримки прийняття рішень у меліорації. **Методи.** Використовували методи математичного моделювання, теоретичних узагальнень та експертного аналізу. **Результати.** Підвищений попит на використання гідротехнічних меліорацій в умовах змін клімату потребує виконання великого обсягу комплексних досліджень з обґрунтування технічних та технологічних параметрів систем зрошення і дренажу на етапі їх проєктування та підтримки прийняття управлінських рішень із забезпечення ефективної еколого-безпечної експлуатації наявних та новостворюваних систем. Такі завдання за різних способів зрошення та водорегулювання пропонується виконувати методом розв'язання прямих задач із застосуванням рівняння Річардса в термінах напорів в одновимірній (дощування, водорегулювання з використанням дренажу) або двовимірній постановці (всі різновиди краплинного зрошення). Розв'язання обернених задач із використанням згадуваного рівняння Річардса дає можливість визначати конструктивні параметри систем підґрунтового краплинного зрошення та дренажу. Важливим класом задач, які потребують розв'язання на етапах проєктування систем зрошення і дренажу, є задачі визначення сівозміни та норми водопотреби. Вибір оптимальної сівозміни вперше запропоновано здійснювати саме методами математичного моделювання. **Висновки.** Відновлення та розвиток систем зрошення і дренажу з метою компенсації збитків в аграрному секторі економіки, спричинених військовою агресією РФ, а також задля реалізації планів повоєнної відбудови України має базуватися на використанні енерго- й ресурсощадних та еколого-

безпечних систем зрошення і дренажу, застосування яких потребуватиме значних обсягів досліджень з обґрунтування їх конструкційних параметрів та режимів експлуатації. Як основний інструмент таких досліджень запропоновано використовувати методи математичного моделювання, зокрема методики, розроблені та апробовані авторами статті.

Ключові слова: математичне моделювання, системи зрошення і дренажу, конструктивні та технологічні параметри, вологоперенесення, евапотранспірація, водопотреба, режими водоподачі.

DOI: <https://doi.org/10.31073/agrovisnyk202401-07>

Кліматичні зміни, особливо «гаряча» їх фаза, що розпочалася в Україні наприкінці 70-х — на початку 80-х років минулого століття і характеризується найвищими в Європі темпами зростання середньорічної температури повітря (понад 0,7 °C/10 років) за практично незмінної кількості опадів, зумовили зростання потреби у зрошенні та водорегулюванні [1]. Ця потреба посилюється наслідками військової агресії РФ, у першу чергу, руйнуванням греблі Каховського водосховища, внаслідок чого без джерела води залишились більшість зрошувальних систем південних регіонів України, що, безумовно, спричинить їх прискорену руйнацію та унеможливить відновлення експлуатації після відбудови Каховського водосховища без здійснення заходів з їх реконструкції та модернізації. Великий обсяг відновлювальних робіт на зрошувальних системах тимчасово окупованих територій, що здійснюватимуться після їх звільнення, та прискорене виконання робіт із нарощування площ зрошення та дренажу, передусім в Одеській області та на Поліссі, з метою посилення ролі цих регіонів у забезпеченні продовольчої безпеки України та світу, потребує виконання значного обсягу проектних робіт. Такі проекти мають передбачати застосування новітніх технологій та технічних засобів зрошення і водорегулювання, що, своєю чергою, повинні базуватися на відповідному науковому обґрунтуванні. Ефективність ухвалених управлінських рішень під час експлуатації функціонуючих систем зрошення і дренажу також напряму залежить від рівня їх наукового обґрунтування.

Головне завдання систем зрошення і дренажу, як відомо, полягає в підтриманні

оптимального для розвитку вирощуваних на зрошуваних та осушуваних землях сільськогосподарських культур водного режиму ґрунту, адже саме рівень його вологозабезпечення є критичним фактором впливу на процеси у системі «ґрунт — атмосфера — рослина», а отже, на продуктивність вирощуваних культур. Дані щодо кількості ґрунтової вологи та її доступності рослинам — важливе джерело інформації, необхідної для прийняття правильних рішень як на стадії проектування систем зрошення і дренажу, так і на стадії їх експлуатації залежно від вирощуваної культури, а також для оперативного управління поливами та водорегулюванням.

До завдань, що потребують вирішення на етапі проектування систем зрошення і дренажу, належить визначення сівозміни та норм водопотреби сільськогосподарських культур, що вирощуватимуться в умовах зрошення чи водорегулювання. Ця інформація стане основою для обґрунтування потреби у воді та розрахунку параметрів систем зрошення чи дренажу.

Мета досліджень — обґрунтувати доцільність та напрямки застосування математичного моделювання для вирішення завдань, пов'язаних із дослідженням та підтримкою прийняття рішень у меліорації.

Матеріали та методи досліджень. Дослідження здійснювались із використанням методів математичного моделювання, теоретичних узагальнень та експертного аналізу.

Результати досліджень. Обґрунтовано можливість та доцільність використання математичного моделювання для дослідження процесів вологоперенесення з метою визначення конструктивних параметрів

систем зрошення та дренажу, норм водопотреби, параметрів режимів зрошення, водоподачі та водорегулювання, вибору сівозмін та підтримки прийняття рішень у системх управління поливами.

Такий підхід дає змогу скоротити обсяги дороговартісних та довготривалих експериментальних досліджень, що в нинішніх умовах недостатнього фінансування науки є вкрай актуальним. З іншого боку, виконані багатьма вітчизняними та зарубіжними науковцями дослідження достатньою мірою узаконені та формалізовані в математичних моделях різного виду, обґрунтування можливості та методологія використання яких і є метою цієї статті.

Моделі динаміки доступності вологи рослинам. Найпростіші та широко використовувані моделі динаміки доступності вологи рослинам (наприклад, FAO-56 [2]) засновані на максимально точному визначенні евапотранспірації без урахування особливостей часового та просторового розподілу тисків ґрунтової вологи, які визначають її доступність рослинам. Такі моделі є ефективними у разі вирощування культур суцільного висіву за умов формування однорідних зон зволоження, зокрема за зрошення дощуванням. Процеси в системі «ґрунт — рослина — атмосфера» можна з достатньою точністю розглядати в одновимірному наближенні, а гідрофізичні властивості ґрунтів використовувати для визначення режимів зрошення.

Як розподіляється волога в ґрунті, важливо знати насамперед у разі його суттєвої неоднорідності, що може мати як природне походження, так і бути наслідком сільськогосподарської діяльності або застосування водозберігаючих способів зрошення, метою яких є подача вологи саме у ті зони, де вона є необхідною та має бути доступною рослинам.

Найпростішими є емпіричні моделі, побудовані з використанням результатів експериментальних досліджень зон зволоження за краплинного зрошення [3, 4]. Проте внаслідок суттєвих відмінностей у структурі та гідрофізичних властивостях ґрунтів, навіть у межах одного їх класу, кожна конкретна емпірична модель має дуже вузький діапазон умов застосування.

Гарний ефект дає використання багаточислових балансових та диференціальних моделей процесів вологоперенесення у ґрунтах. Найістотніше для вказаних цілей використовувати диференціальне рівняння Річардса [5], яке описує вологоперенесення у ґрунтових середовищах із властивостями, незалежними від масштабу.

Враховуючи взаємозалежність між тиском та кількістю ґрунтової вологи, що описується основною гідрофізичною характеристикою (ОГХ), рівняння Річардса може бути подане як у термінах вологості, так і в термінах тисків (напорів). Ефективнішим є другий підхід, оскільки використання подібних рівнянь дає можливість розглядати зону аерації в одній гідродинамічній схемі з горизонтами ґрунтових вод, а водотрив водоносного горизонту може використовуватись як гранична умова у відповідній крайовій задачі. До того ж дискретне моделювання у термінах напорів має більшу точність, оскільки за величин вологості на рівні передполивного порога невеликі її зміни можуть сприяти значним змінам тиску і, відповідно, доступності вологи рослинам.

Модель, заснована на рівнянні Річардса, що записане в термінах напорів, у двовимірній постановці матиме такий вигляд [6]:

$$C(h) \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(H) \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k(H) \frac{\partial H}{\partial z} \right) - S, \quad 0 \leq x \leq L_x, \quad 0 \leq z \leq L_z, \quad t \geq 0,$$

де $h(x, z, t) = \frac{P(x, z, t)}{\rho g}$ — напір, м; $H(x, z, t) = h(x, z, t) + z$ — повний потенціал вологості, м; $P(x, z, t)$ — всмоктуючий тиск, Па; ρ — щільність води, кг/м³; g — прискорення вільного падіння, м/с²; $C(h) = \frac{\partial \theta}{\partial h}$ — диференціальна вологоємність; $\theta(x, z, t)$ — об'ємна вологість ґрунту, %; $k(H)$ — коефіцієнт вологоперенесення, м/с; $S(x, z, t)$ — функція джерел, 1/с, що моделює екстракцію вологи корінням рослин та її подачу підґрунтовым краплинним зрошенням.

На нижній границі області розв'язання $z = L_z$ при цьому ставиться умова $\frac{\partial H}{\partial z} = 0$ у разі моделювання ситуації, коли зрошення не чинить суттєвого впливу на рух вологи і на

відповідній глибині відбувається лише її гравітаційне стікання. Умова $h = 0$ може ставитися за відомого фіксованого рівня ґрунтових вод, а умова непротікання $\frac{\partial h}{\partial z} = 0$ — за наявності водотриву.

На верхній границі $z = 0$ задається крайова умова $k(H)\frac{\partial H}{\partial z} = Q_e(t) - Q_p(t) - Q_i(x, t)$, де $Q_e(t)$, $Q_p(t)$, $Q_i(x, t)$ — потоки, м/с, викликані відповідно випаровуванням, опадами та зрошенням. На бічних гранях $x = 0$, $x = L_x$ ставиться умова другого роду $\frac{\partial H}{\partial x} = 0$, яка, зокрема, описує симетричність процесів у зонах впливу сусідніх краплинних трубопроводів.

Для точнішого моделювання можна використовувати складніші моделі, до яких належать моделі подвійної пористості [7], а також моделі, що враховують хімічні процеси [8], перенесення повітряної фази [9] та фрактальні властивості ґрунтів [10]. У разі моделювання процесів масоперенесення у пористих середовищах фрактальної структури, якими за певних умов можна вважати і ґрунти, що на них впливає сільськогосподарська діяльність, можуть бути застосовані дробово-диференціальні рівняння [11]. Використання таких моделей дає змогу підвищити точність моделювання у складних геогідрологічних умовах завдяки врахуванню ефектів пам'яті та нелокальних просторових взаємодій. Дробово-диференціальні моделі можна розглядати як напівемпіричні, де порядки дробових похідних є додатковими параметрами, значення яких ідентифікуються в процесі адаптації моделі до конкретних умов вирощування культури.

Зауважимо, що ускладнення моделей приводить до необхідності точного визначення значень їх параметрів або їх ідентифікації на основі порівняння змодельованих та замірених величин.

Критичними для точності моделювання є гідрофізичні властивості ґрунтів — форми їх ОГХ та залежності коефіцієнта вологоперенесення від тиску. Джерелами цих залежностей можуть бути лабораторні дослідження (див., наприклад, [12]), або моделі, базовані на статистичних узагальненнях даних

лабораторних досліджень (наприклад, Rosetta 3 [13]). Такі моделі потребують обмеженої кількості вихідних даних — насамперед даних щодо гранулометричного складу ґрунту. Оскільки у них узагальнюються відомості щодо ґрунтів, характерних для географічно рознесених територій, генеровані наближення часто мають високий рівень варіативності. Це зумовлює необхідність локальних досліджень гідрофізичних характеристик ґрунтів як у разі практичного застосування, так і під час проведення наукових досліджень. Виконані авторами дослідження показують, що особлива увага при цьому має приділятися максимально точному визначенню коефіцієнта фільтрації (коефіцієнта вологоперенесення у ґрунті, що перебуває у насиченому стані).

Другим критичним параметром, визначення якого так само має бути адаптованим до фактичних умов вирощування культури, є величина евапотранспірації. Для такої адаптації можуть застосовуватися підходи, засновані на експериментальному визначенні коефіцієнтів культур [14], комбінуванні кількох розрахункових методів [15] або на застосуванні методів машинного навчання, зокрема з використанням нейромереж [16]. Зауважимо, що всі ці підходи потребують збирання великої кількості моніторингових даних та застосовні в межах лише однієї пари «культура — ґрунт».

Точність моделювання, що впливає на ефективність управлінських рішень, а отже, на фінальну врожайність культур, істотно залежить від кількості та точності даних щодо стану ґрунту, одержання яких потребує певних фінансових і часових витрат. Йдеться, зокрема, про лабораторні дослідження гідрофізичних властивостей ґрунтів і моніторинг стану їх вологозабезпечення за допомогою розміщених у полях мікрометеостанцій.

Саме ж моделювання потребує або, у складних випадках, витрат на консалтингові послуги, або, у простіших, за наявності вільно чи комерційно доступного програмного забезпечення (наприклад, CropWat [17]), витрат на навчання персоналу.

Задачі моделювання сівозмін та норм водопотреби. Математичні моделі вологоперенесення в одновимірному наближенні

знаходять своє застосування під час розв'язання деяких важливих задач за умов великих діапазонів змін значень вихідних даних. У таких ситуаціях ускладнення моделі, зокрема перехід до двовимірних постановок, не збільшує точність моделювання, оскільки потенційні діапазони змін вихідних даних перевищують похибки моделі. До таких задач належить задача на визначення усереднених зрошувальних норм.

Наявність оцінок зрошувальних норм, усереднених для типових умов вирощування культур, формалізованих узагальнених моделей врожайності та експертних оцінок ефективності вирощування культур у сівозміні дає змогу без проведення додаткових часозатратних вегетаційних дослідів надавати рекомендації стосовно вибору економічно ефективних сівозмін. Одна з методик такого моделювання, розроблена авторами, представлена у праці [18].

Обґрунтування параметрів систем краплинного зрошення. Що стосується середньо- та довгострокового планування, насамперед у випадку точкової подачі зрошувальної води системами краплинного зрошення або осушувально-зволожувальними системами подвійної дії, то постає низка завдань, пов'язаних із розширенням їх застосування як одних із найефективніших методів адаптації сільського господарства до змін клімату.

Так, розширення застосування краплинного зрошення, насамперед найперспективнішого його різновиду — підґрунтового краплинного зрошення — потребуватиме розв'язання ряду техніко-технологічних задач, пов'язаних з обґрунтуванням параметрів систем підґрунтового краплинного зрошення (СПКЗ) залежно від умов їх застосування та режимів водоподачі, дотримання яких дасть змогу досягати максимального економічного ефекту за мінімальних капітальних витрат на спорудження СПКЗ і питомих витрат поливної води на одиницю врожаю зрошуваних сільськогосподарських культур.

До конструктивних параметрів СПКЗ, що потребують визначення, належать глибина закладання та відстань між поливними трубопроводами. Витрати поливної води, згідно з даними експериментальних

досліджень, залежать не тільки від конструктивних параметрів СПКЗ, а й від режиму водоподачі, тип та оптимальні значення параметрів якого також потребують визначення.

Алгоритми автоматизації вибору параметрів СПКЗ та режиму водоподачі можуть розглядатись як оптимізаційна надбудова над моделями вологоперенесення з цільовими функціями, базованими на економічній оцінці ефективності та обмеженнях, що витікають з біологічної необхідності забезпечення рослин вологою [19, 20]. Аналогічний підхід можна використовувати і для осушувально-зволожувальних систем подвійної дії [21].

Для розв'язання таких задач слід проводити сценарне моделювання всього сезону вегетації або принаймні його частини, у межах якої вологоспоживання рослин найбільше [19]. Проте модель, верифіковану на даних експериментального визначення зон зволоження, можна використовувати для визначення інтервалів значень параметрів і без проведення часозатратних лабораторних досліджень структури ґрунту на конкретних полях.

Особливості визначення параметрів режиму водоподачі. Зауважимо, що додаткові складнощі під час моделювання викликає специфіка розвитку кореневої системи рослин за точкової подачі зрошувальної вологи. Так, зокрема, мікроімпульсний режим водоподачі за краплинного зрошення [22] передбачає, на відміну від постійного зрошення, подачу води у зони максимальної концентрації кореневої системи рослин якомога меншими тактами фіксованої чи змінної тривалості й адаптації до фактичної водопотреби у межах денного циклу.

Використання мікроімпульсного режиму зрошення дає можливість формувати у певних зонах зволоженого об'єму рівні вологості, вищі за рівень найменшої вологості (НВ). Завдяки цьому волога та поживні речовини стають доступнішими рослинам у відповідних зонах, ніж за інших режимів зрошення. Це, у свою чергу, сприяє інтенсивнішому росту кореневої системи рослин у зонах зволоження [23]. У такій ситуації, неврахування під час моделювання факту залежності форми та розміру

кореневої системи від розподілу вологості може призвести до генерації фізично не обґрунтованих рекомендацій.

За відсутності специфічних експериментальних даних стосовно динаміки розвитку кореневої системи вирощуваних в Україні сільськогосподарських культур залишається відкритим питання її моделювання та визначення чутливості моделей вологоперенесення до точності моделювання кореневих систем.

Оперативне управління поливами.

Що стосується оперативного управління поливами, та ефективною показала себе [24] розроблена авторами статті методика [25, 26], за якої використовують 5-денний, сформований на основі загальнодоступних метеоданих, прогноз необхідності поливу та адаптовані до змін умов зростання культури параметри моделі за значного відхилення значень модельованих величин тисків від

замірних. Ця методика базується на моделюванні вологоперенесення в одновимірному наближенні та застосовна передусім до зрошення дощуванням.

Оскільки у разі краплинного зрошення затримка між моментом інструментального визначення необхідності поливу та подачею води мінімальна, потреба в прогнозуванні цього моменту знижується і найчастіше для оперативного управління застосовуються автоматичні системи керування з датчиками, розміщеними безпосередньо в кореневих системах рослин. Використання математичного моделювання у такому випадку стає принциповим для мінімізації впливу похибок вимірювання на точність призначення поливів [25] або за складних конфігурацій висіву культур та розміщення трубопроводів, зокрема описаного вище випадку впливу конфігурації на розвиток кореневої системи рослин.

Висновки

Математичне моделювання слід розглядати як ефективний інструмент розв'язання низки дослідницьких завдань, пов'язаних із розробленням проєктів систем зрошення та дренажу, а також у системах підтримки прийняття рішень під час їх експлуатації. Особливо репрезентативним є використання математичного моделювання для дослідження процесів вологоперенесення у ґрунтах зони аерації з метою обґрунтування конструктивних параметрів систем зрошення і дренажу та параметрів режимів зрошення і водорегулювання. Застосування методів математичного моделювання значно розширює можливості та підвищує обґрунтованість розрахунків евапотранспірації,

термінів та норм поливу, режимів водоподачі та водовідведення в системах підтримки прийняття рішень для управління зрошенням та водорегулюванням.

Подальші дослідження щодо розширення сфер застосування математичного моделювання в меліорації мають бути спрямовані на встановлення моделей формування кореневої системи різноманітних сільськогосподарських культур за їх вирощування із використанням різних способів та режимів зрошення і водорегулювання, встановлення коефіцієнтів споживання елементів живлення за технологій внесення добрив та мікроелементів з поливною водою тощо.

Romashchenko M.¹, Bohaienko V.²

¹Kyiv Agrarian University of NAAS, 37 Vasylykivska Str., Kyiv, 03022, Ukraine; ²VM Hlushkov Institute of Cybernetics of NAS of Ukraine, 40 Hlushkov ave., Kyiv, 03187, Ukraine; e-mail: ¹mi.romashchenko@gmail.com, ²sevab@ukr.net; ORCID: ¹0000-0002-9997-1346, ²0000-0002-3317-9022

Mathematical modeling as a tool for research and decision-making support in land reclamation

Goal. To justify the expediency and directions of applying mathematical modeling to solve

research tasks and support decision-making in land reclamation. **Methods.** The methods of mathematical modeling, theoretical generalizations, and expert analysis were used. **Results.** The increased demand for the use of hydrotechnical reclamations in the conditions of climate change requires the performance of a large volume of complex studies on the justification of technical and technological parameters of irrigation and drainage systems at the stage of their design and support of management decision-making to ensure

effective environmentally safe operation of existing and newly created systems. Such tasks for various methods of irrigation and water regulation are proposed to be performed by the method of solving direct problems using the Richards equation in terms of pressures in a one-dimensional (sprinkling, water regulation using drainage) or two-dimensional setting (all types of drip irrigation). Solving inverse problems using the aforementioned Richards equation makes it possible to determine the design parameters of subsoil drip irrigation and drainage systems. An important class of problems that need to be solved at the stages of designing irrigation and drainage systems are the problems of determining crop rotation and water consumption norms. The choice of the optimal crop rotation was proposed for the first time to be carried out precisely by the methods of mathematical modeling. **Conclusions.** The restoration and

development of irrigation and drainage systems in order to compensate for losses in the agricultural sector of the economy caused by the military aggression of the Russian Federation, as well as for the implementation of plans for the post-war reconstruction of Ukraine, should be based on the use of energy- and resource-saving and environmentally safe irrigation and drainage systems, the application of which will require significant amounts of research from substantiation of their design parameters and operating modes. As the main tool of such research, it is proposed to use mathematical modeling methods, in particular, methods developed and tested by the authors of the article.

Key words: mathematical modeling, irrigation and drainage systems, structural and technological parameters, moisture transfer, evapotranspiration, water demand, water supply modes.

DOI: <https://doi.org/10.31073/agrovisnyk202401-07>

Бібліографія

1. Файбишенко Б., Ромащенко М., Сайдак Р., Біро С. Явища інтенсивних кліматичних змін на території України та бачення розширення системи кліматичного моніторингу. <https://meetingorganizer.copernicus.org/GC8-Hydro/GC8-Hydro-111.html>
2. *Crop evapotranspiration — Guidelines for computing crop water requirements* — FAO Irrigation and drainage paper 56. Rome: FAO — Food and Agriculture Organization of the United Nations, 1998. <https://www.fao.org/3/x0490e/x0490e00.htm>
3. Ромащенко М.І., Корюненко В.М., Ключин Д.А. Закономірності зволоження ґрунтів при мікрозрошенні. *Вісник аграрної науки*. 1998. № 12. С. 45–51.
4. Шатковський А.П., Журавльов О.В., Черевичний Ю.О. Особливості формування та параметри зон зволоження ґрунтів за краплинного зрошення. *Зрошуване землеробство*. 2016. № 65. С. 15–19.
5. Richards L.A. Capillary conduction of liquids through porous mediums. *Physics*. 1931. N 1 (5). P. 318–333.
6. Ромащенко М., Богаєнко В., Білоброва А. Двовимірне математичне моделювання водного режиму ґрунту за краплинного зрошення. *Вісник аграрної науки*. 2021. № 4. С. 59–66.
7. Bulavatsky V.M., Bohaienko V.O. Boundary-Value Problems for Space-Time Fractional Differential Filtration Dynamics in Fractured-Porous Media. *Cybern Syst Anal*. 2022. N 58. P. 358–371. doi: 10.1007/s10559-022-00468-9
8. Бомба А.В., Булавацький В.М., Скопечкий В.В. Нелінійні математичні моделі процесів геогідродинаміки. Київ: Наукова думка, 2007. 291 с.
9. Lyura A.A., Morozov D.N., Trapeznikova M.A. et al. Three Phase Filtration Modeling by Explicit Methods on Hybrid Computer Systems. *Math Models Comput Simul*. 2014. N 6. P. 551–559.
10. Bohaienko V., Bulavatsky V. Fractional-Fractal Modeling of Filtration-Consolidation Processes in Saline Saturated Soils. *Fractal Fract*. 2020. N 4. 59 p. doi: 10.3390/fractalfract4040059
11. Podlubny I. *Fractional Differential Equations*. New York: Academic Press, 1999.
12. Ромащенко М.І., Коломієць С.С., Білоброва А.С. Система лабораторного діагностування водно-фізичних властивостей ґрунтів. *Меліорація і водне господарство*. 2019. № 2. С. 199–208.
13. Zhang Y., Schaap M.G. Weighted Recalibration of the Rosetta Pedotransfer Model with Improved Estimates of Hydraulic Parameter Distributions and Summary Statistics (Rosetta3). *J. of Hydrology*. 2017. N 547. P. 39–53.
14. Romashchenko M., Shatkowski A., Zhuravlev O. Features of application of the Penman-Monteith method for conditions of a drip irrigation of the steppe of Ukraine (on example of grain corn). *J. of Water and Land Development*. 2016. V. 31. N 1. P. 123–127.
15. Romashchenko M.I., Bohaienko V.O., Matysh T.V. et al. Influence of evapotranspiration assessment on the accuracy of moisture transport modeling under the conditions of sprinkling irrigation in the south of Ukraine. *Archives of Agronomy and Soil Science*. 2020. V. 66. N 10. P. 1424–1435.
16. Kumar M., Raghuvanshi N.S., Singh R. et al. Estimating Evapotranspiration using Artificial Neural Network. *J. of Irrigation and Drainage Engineering*. 2002. V. 128. N 4. P. 224–233.

17. Smith M. CROPWAT: a Computer Program for Irrigation Planning and Management. Rome: Food and Agriculture Organization of the United Nations. 1992. <https://books.google.com.ua/books/about/CROPWAT.html?id=p9tB2ht47NAC>
18. Romashchenko M., Bohaienko V., Shatkovskiy A. et al. Optimisation of crop rotations: A case study for corn growing practices in forest-steppe of Ukraine. *J. of Water and Land Development*. 2023. 56. P. 194–202.
19. Romashchenko M., Bohaienko V., Sardak A., Nykytiuk O. Determination of the parameters of subsurface drip irrigation systems on the base of moisture transport modeling. *Visnyk of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Geology*. 2023. 2 (101). P. 103–110.
20. Seidel S.J., Schütze N., Fahle M. et al. Optimal Irrigation Scheduling, Irrigation Control and Drip Line Layout to Increase Water Productivity and Profit in Subsurface Drip-Irrigated Agriculture. *Irrig. and Drain*. 2015. 64. P. 501–518. doi: 10.1002/ird.1926
21. Romashchenko M., Bohaienko V. Mathematical modeling of water regulation on dual-action drainage systems. *Land Reclamation and Water Management*. 2023. N 1. P. 26–34. doi: 10.31073/mivg202301-360
22. Rank P.H., Vishnu B. Pulse drip irrigation: A review. *J. of Pharmacognosy and Phytochemistry*. 2021. N 10. P. 125–130.
23. Segal E., Ben-Gal A., Shani U. Root Water Uptake Efficiency Under Ultra-High Irrigation Frequency. *Plant Soil*. 2006. 282. P. 333–341. doi: 10.1007/s11104-006-0003-6
24. Matiash T., Romashchenko M., Bogaenko V. et al. Monitoring and irrigation regime formation when growing crops using the «Irrigation Online» system. *Land Reclamation and Water Management*. 2022. N 1. P. 29–39. doi: 10.31073/mivg202201-321
25. Bohaienko V., Matiash T., Kruchenjuk A. Decision Support System in Sprinkler Irrigation Based on a Fractional Moisture Transport Model. *Advances in Computer Science for Engineering and Education IV. ICCSEEA 2021. Lecture Notes on Data Engineering and Communications Technologies*. Cham: Springer. 2021. V. 83. doi: 10.1007/978-3-030-80472-5_2
26. Gadzalo Y., Romashchenko M., Kovalchuk V. et al. Using smart technologies in irrigation management. *International Commission on Irrigation and Drainage: 3rd World Irrigation Forum*. Bali, 2019. 178 p.
27. Bohaienko V., Romashchenko M., Sardak A., Gladky A. Mathematical modelling technique to mitigate soil moisture measurement inaccuracies under the conditions of drip irrigation. *Irrigation Science*. 2023. 41 (3). P. 413–424.